この授業では，単位や次元，および微分や積分について取り扱います．高校の物理が苦手な人には厳しい授業になります．分からなければ，毎回の授業の提出物に「具体的に」分からないことを記述するか，できれば授業中に質問してください．明らかに理解不足な解答用紙に，努力する決意表明が記述されていても，フォローできません．

1．　以下の解答例A，解答例Bと解答例Cにおける誤りを指摘してください．いずれも質量5.0gの重りを速さ一定で10秒に10.0cm鉛直上方に引き上げる際の仕事率を計算するものです．なお，それぞれの数値の計測は，質量が0.1g単位，鉛直上方への移動距離は1mm単位，時間は1秒刻みである．また重力加速度は9.80665m/s2であるとします．  
  
■解答例A：5.0÷1000×9.80665×10÷(10)＝0.00490W  
  
■解答例B　質量5.0gの物体を，重力加速度*g*の下で，高さ10cm引き上げる仕事は  
5.0÷1000×9.80665×10/100=4.903325×10-2  
仕事率は1秒間あたりの仕事であるから  
4.903325×10-2/10=4.90×10-3 W=4.90 mW  
よって4.90 mW  
  
■解答例C　仕事率*L*で鉛直上方に一定速度で*t*秒間に高さ*h*引き上げる時の式は式(1)で表される．  
  
　　*L*=*Mgh*/*t* (1-1)  
  
　ここで与えられた条件に基づいて，*M*=5.0，*g*=9.80665，h=10/100, t=10を代入すると，L=0.490033Wの解が得られる．以上より求める仕事率は0.490033 Wである．

2．　下に示す目盛り上にsin60°を記入して値を読み取り，その値を2倍した値と2 sin60°の数値を求めてください．これらの値に基づき，四捨五入する際に≒を使ってはならない理由と，数値を代入して計算するときに誤差を小さくする方法について説明してください．

0

1.0

2.0

3．　平地にて停止した車重１ｔの車を一定の加速度で10秒後に時速100㎞まで加速する時に必要な馬力を求めてください．1tは1000㎏です．馬力の単位はPSで，1PSは概ね75×9.80665 Wです．

4．　図1において，点Aと点Bを結ぶ円弧の長さを，図中の記号を用いて表してください．

(*x*, *y*)

*x*

*y*

図１　三角関数の関係を確認するための図

(0,0)

*r*

θ

極座標による表現（この授業で扱わない）

A

B

ベクトルによる表現

5．　図1における*x*と*y*をrとθで表わしてください．また，逆三角関数ではθ=arctan(tanθ)という関係がありますが，その関係を用いてθを*x*と*y*で表して下さい．

6．　回転軸がトルク*T* N･mで回転し，仕事率*P* Wの出力を発揮する時，一秒間あたりの回転数を求めてください．（トルクは，力のモーメントと同じ意味で，回転方向にかかる力の大きさとその作用点と回転中心の距離の積です．）

7．　図2は低温度差スターリングエンジンを熱力学的に解析するための模式図です．記号は，*V*が容積，*T*が温度，*m*と*R*が動作流体(注7-1)の質量と気体定数，*P*が圧力とする．添え字は，cpがパワーピストンシリンダ内の変化する部分，cがパワーピストンのある側の空間でディスプレーサの往復動で変化する部分，hがパワーピストンの無い側の空間でディスプレーサの往復動で変化する部分，cおよびhの後にdがつく添え字は掃気されない空間，rも掃気されないが再生器のように温度分布がある空間を表す（注7-2）．ここでは動作流体の漏れはないものとし，ディスプレーサやピストンの往復動により点線で区切られた各区画の容積は変化する部分もあり，動作流体の移動もあるが，各区画の温度は変化せず，また区画毎の圧力差はなく，全区画の圧力が同時に変化する，と仮定する．この一連の仮定が等温モデルである．（注7-1　動作流体は熱力学的な仕事をする流体のこと．ここでは内部に充填した気体．注7-2　一般的にピストンのある側が上に来て，低温側になることが多い．しかし，この解析においては高温と低温が入れ替わっても差し支えない．）

*V*h, *T*h

*V*r, *T*r

*V*cd, *T*c

*V*c, *T*c

*V*cp, *T*c

再生器

ガスシール

熱交換器

ディスプレーサ

熱交換器

*V*h, *T*h

ピストン

*V*hd, *T*h

*V*r, *T*r

*V*cd, *T*c

*V*c, *T*c

*V*cp, *T*c

ディスプレーサ

図2　等温モデルで表す低温度差スターリングエンジン

7．1　圧力Pが一定の条件で，*V*cと*V*hの容積変化が式(7-1)(7-2)で与えられるとき，ピストンシリンダ内の容積*V*cpの最大値と最小値の差，内部エネルギ*U*の変化量を求めてください．理想気体の状態方程式は式(7-3)を用いるものとします．式(7-4)(7-5)の関係があります．機械系では一般気体定数*R*0=8.3145J/(mol･K)と物質量*n*ではなく，質量*m*と気体毎に異なる気体定数*R*を用いることが多い．なお*A*D*x*stDとαが定数である．*φ*が変数である．内部エネルギの計算は定容比熱*CV*を用いて式(7-6)で計算できる．しかし，ここでは定容比熱*CV*を温度に関わらず一定とみなし，式(7-7)を用いて良い．

7．2　問7.1に類似した状況で，動作流体が得るエネルギを全て使い切る条件を考えてください．（その条件ではスターリングエンジンが継続的に運転できないと思いますが）

7．3　問7.1のスターリングエンジンで，圧力一定の条件を取りやめ，式(7-8)の仮定を与えた仮想的なモデルがシュミット（Schmidt）サイクルと呼ばれ，その*PV*線図は図3のようになる．  
　なお断面積*A*と行程*x*（注：行程は往復動の移動距離）の積は行程容積と呼ばれる．式(7-1)(7-2)で用いるαはピストンとディスプレーサの運動の位相差である．式(7-8)の位相*φ*はピストンシリンダ内の容積が最小になるときを0としている．式(7-1)(7-2)と式（7-8）の関係は，実際のクラク機構を用いた場合とは若干異なる．式(7-9)の整理に，式(7-10)と図4を導入すると，式(7-11)(7-12)(7-13)が得られる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7-1) |
|  | (7-2) |

*PV*=*mRT* (7-3)

*PV*=*nR*0*T* (7-4)

*R*0=*MR* (7-5)

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7-6) |
|  | (7-7) |
|  | (7-8) |
|  | (7-9) |
|  | (7-10) |
|  | (7-11) |
|  | (7-12) |
|  | (7-13) |

*P*

*V*

*P*max

*P*mean

*P*min

*φ*=*β*

*φ*≈*π*/2+*β*

*φ*=*π*

*φ*=*π*+*β*

*V*max

*V*min

*φ*=0

*φ*≈3*π*/2+*β*

図3　シュミットサイクルの*PV*線図

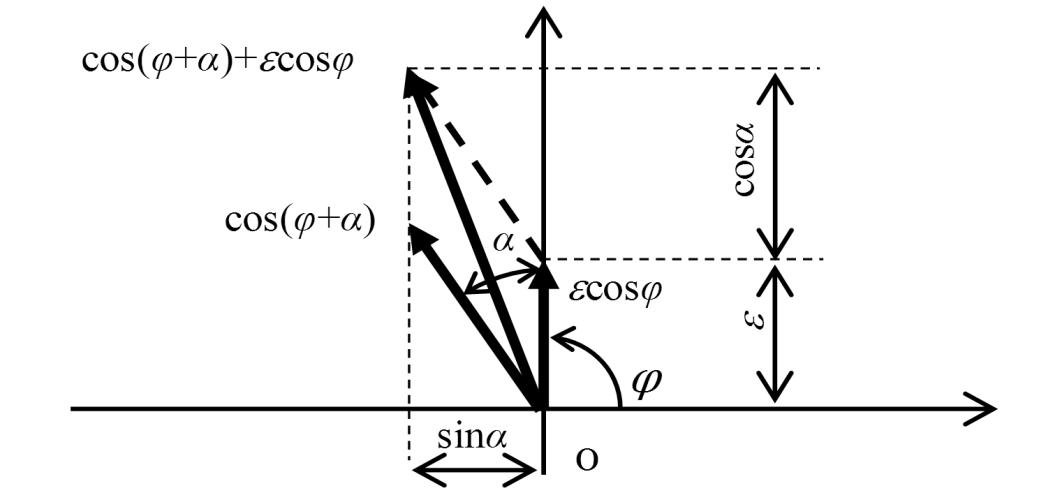


図4　三角関数の和

7．3．1　図3の周回積分において，時計回りが正，反時計回りが負になる理由を説明してください．

なお図３は圧力一定の条件を取りやめて式(7-8)の仮定を与えた仮想的なモデル，シュミット（Schmidt）サイクル，の*PV*線図である．問7.1における*A*D*x*stDはディスプレーサの掃気容積である．*A*p*x*stpはピストンの掃気容積で，ピストンの断面積*A*pと行程*x*stp（注：行程は往復動の移動距離）の積で行程容積と呼ばれる．式(7-1)(7-2)で用いるαはピストンとディスプレーサの運動の位相差である．位相φは式(7-8)が示すように，ピストンのシリンダ内容積が最小値で0となる位相の変数である．式(7-1)(7-2)と式（7-8）の関係は，実際のクランク機構を用いた場合とは若干異なる．式(7-9)の整理に，式(7-10)と図4を導入すると，式(7-11)(7-12)(7-13)が得られる．

7．3．2　ピストン周辺の圧力（注：バッファ圧と言います）が*P*mean一定の条件で，図3の*PV*線図の線上で，ピストンは体積を膨張させようとする箇所と，ピストンが体積を収縮させようとする箇所を，区別して示してください．

7．3．3　実際に熱機関が熱エネルギから仕事を発生する場合は，時計回りに*PV*線図が描かれます．小問7.3．2で考えた「ピストンの動こうとする向き」と熱機関が仕事を発生させるときのピストンの向きが一致するところがあります．この「一致するところ」はピストンがクランク機構に対して正の仕事をしています．しかし，この「ピストンがクランク機構に対して正の仕事をしている」区間で，気体が外部から仕事をされている区間があります．気体が外部から仕事をされているのに，ピストンがクランク機構に正の仕事をする理由を考えてください．  
　また，*PV*線図の面積は，摩擦等を無視したときに，熱機関が発生する仕事として考えて良い理由も合わせて考えてください．

7．3．4　図3の*PV*線図の傾きから，大雑把に，熱の授受で容積が変化する箇所がどこかを，説明してください．

7．3．5　ここまで考えて，絶対に外部から力を加えないと，*PV*線図が時計回り方向に動くような動作をしない箇所がありませんか？

8．　図５で，灰色のマス目の数を数えて求める面積と，一般的な底辺と高さの積を2で除す求め方と値をくらべてください．

図５　0≦*x*≦10における*y*=10*x* と*y*=*x*２のグラフ



9．図6で，*x*=3において*y*を*x*で二階微分した値を，*y*=12/*x*の関係を利用せずに，オイラー法（テイラー展開の第2項目まで考慮する方法）を参考に求めてください．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9-1) |
|  | (9-2) |



図６　微分を考えるグラフ

10.1 　素材が均質で断面積が一定の棒があったとして，棒の端を回転中心とする場合の慣性モーメントは，棒の真ん中を回転中心とする場合の何倍になるか，求めてください．慣性モーメントは，質量*dm*の回転中心からの距離を*r*として，*r*2*dm*を全体に積分することで求められます．

10.2　厚さと密度が一様な質量*m* kg 半径*R* m の円盤において，中心軸を通る回転軸の周りの慣性モーメントが(*mR*2)/2で与えられることを説明してください．慣性モーメントは，質量*dm*の回転中心からの距離を*r*として，*r*2*dm*を全体に積分することで求められます．

曲率半径*r*

*t*秒間

角速度*ω*0

角速度*ω*

質量*m*

仮想的な点O

速度*ω*0*r*

速度*ωr*

円周方向に働く力*F*

質量*m*

*t*秒間

速度*v*0

速度*v*

仮想的な点O

物体に働く力*ma*

加速度*a*

|  |  |
| --- | --- |
| 図4-5-1-3　直線運動 | 図4-5-1-4　円弧上の運動 |

 (4-5-1-1)  
　　 (4-5-1-2)  
　　 (4-5-1-3)  
　　 (4-5-1-4)  
　　 (4-5-1-5)  
　　 (4-5-1-6)  
　　 (4-5-1-7)  
　　 (4-5-1-8)  
　　 (4-5-1-9)  
　　 (4-5-1-10)  
　　 (4-5-1-11)

自著「**An introduction to DIY by handicraft of a low temperature differential Stirling engine written in Japanese スターリングエンジンの手作りでDIY入門」**から抜粋して引用

10.3 　直角三角形の鋭角な頂点回りの慣性モーメントを，図7を参考に求めてください．多角形の物体であれば，直角三角形の集まりとして，慣性モーメントを計算することが可能です．なお，三角形一般の慣性モーメントの計算はエグイことになりました・・・

図７　多角形と直角三角形の慣性モーメント

直角

長さ*b*

長さ*a*

回転中心

　慣性モーメントは，フライホイルのようにグルグル回る回転運動をする部品以外に，姿勢が変化する類の回転運動をする部品で関係してきます．

11.　 図8は，点Oを中心に点（*x*2,*y*2）が回転運動し，それに伴って点（*x*1,*y*1）が往復動するクランク機構の一種である．点（*x*1,*y*1）の往復動の延長線上に点Oがある場合が単クランク機構，延長線上に点Oが無い図8の場合をオフセットクランク機構などと言う．図8において楕円で示される部品は，点（*x*2,*y*2）と点（*x*1,*y*1）を結ぶ剛体で，連接棒と呼ばれる．  
　図8において，θおよび*x*1が時間の関数で，*y*1と*r*とξが定数である．このときの連接棒上の点（*x*3,*y*3）運動は式(11.1)で示される．この点（*x*3,*y*3）にかかる加速度が，点（*x*1,*y*1）の加速度，連接棒が点（*x*1,*y*1）を中心に回転する際の向心力に関わる加速度，および連接棒の点（*x*1,*y*1）周りの慣性モーメントに関わる加速度の和になることを，式(11.1)に基づく解析により示してください．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (11.1) |

図8　オフセットクランク機構

*θ*

(*x*1,*y*1)

*ξ*’

(*x*2,*y*2)

(*x*3,*y*3)

*x*

*y*

O

*r*

11修正.　 図8は，点Oを中心に点（*x*2,*y*2）が回転運動し，それに伴って点（*x*1,*y*1）が往復動するクランク機構の一種である．点（*x*1,*y*1）の往復動の延長線上に点Oがある場合が単クランク機構，延長線上に点Oが無い図8の場合をオフセットクランク機構などと言う．図8において楕円で示される部品は，点（*x*2,*y*2）と点（*x*1,*y*1）を結ぶ剛体で，連接棒と呼ばれる．  
　図8において，θおよび*x*1が時間の関数で，*y*1と*r*とξが定数である．このときの連接棒上の点（*x*3,*y*3）運動は式(11.1)で示される．この点（*x*3,*y*3）にかかる加速度が，点（*x*1,*y*1）の加速度，連接棒が点（*x*1,*y*1）を中心に回転する際の向心力に関わる加速度，および連接棒の点（*x*1,*y*1）周りの慣性モーメントに関わる加速度の和になることを，式(11.1)に基づく解析により示してください．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (11.1) |

図8　オフセットクランク機構

*θ*

(*x*1,*y*1)

*ξ*

(*x*2,*y*2)

(*x*3,*y*3)

*x*

*y*

O

*r*OA

*r*

12.　例えば加藤が取り扱ったスターリングエンジンでは，クランク角*φ*に式(12.1)の関係があった．係数*A*(*φ*)，*B*(*φ*)，*C*(*φ*)，*D*(*φ*)は学部1～3年生で受講する機械工学に基づいて数式として導くことができるもので，例えばそれをグラフに表示した一例が図9である．  
　下の表計算を用いた角速度の挙動の推定において，3行目以降の計算を，オイラー法を参考に進めてください．

|  |  |
| --- | --- |
|  | **（12.1）** |

図9　解析に用いる係数

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | A | B | C | D | E | F | G | H |
| １ | 角度*φ*  度 | 係数*D*(*φ*) | 係数*A*(*φ*) | 係数*B*(*φ*) | 係数*C*(*φ*) | 角速度rad | 角加速度  rad/s | 時間  秒 |
| ２ | 0 | -0.00025 | -0.00027 | -0.000046 | -0.00015 | 1×2π |  | 0 |
| ３ | 1 | -0.00026 | -0.00028 | -0.000049 | -0.00015 |  |  |  |
| ４ | 2 | -0.00027 | -0.00028 | -0.000052 | -0.00015 |  |  |  |
| ５ | 3 | -0.00028 | -0.00029 | -0.000055 | -0.00015 |  |  |  |

A2，F2, H2：計算を始めるクランク角，角速度，時間を初期値として与える．

A列：ここではクランク角*φ*が1度ずつ増えるようにした．例：[A3]=[A2]+1

B列～E列: 式(12.1)とともに別途計算で定まる定数．

G列：式(12.1)にB～F列の値を代入するとd2*φ/dt*2が求められる．

H列：例えば360度後の角速度が概ね同じとき，その所要時間の逆数が1秒当たりの回転数になる．

12（修正）.　例えば加藤が取り扱ったスターリングエンジンでは，クランク角*φ*に式(12.1)の関係があった．係数*A*(*φ*)，*B*(*φ*)，*C*(*φ*)，*D*(*φ*)は学部1～3年生で受講する機械工学に基づいて数式として導くことができるもので，例えばそれをグラフに表示した一例が図9である．  
　下の表計算を用いた角速度の挙動の推定において，3行目以降の計算を，オイラー法を参考に進めてください．

|  |  |
| --- | --- |
|  | **（12.1）** |

図9　解析に用いる係数

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | A | B | C | D | E | F | G | H |
| １ | 角度*φ*  度 | 係数*D*(*φ*) | 係数*A*(*φ*) | 係数*B*(*φ*) | 係数*C*(*φ*) | 角速度rad/s | 角加速度  rad/s2 | 時間  秒 |
| ２ | 0 | -0.00025 | -0.00027 | -0.000046 | -0.00015 | 1×2π |  | 0 |
| ３ | 1 | -0.00026 | -0.00028 | -0.000049 | -0.00015 |  |  |  |
| ４ | 2 | -0.00027 | -0.00028 | -0.000052 | -0.00015 |  |  |  |
| ５ | 3 | -0.00028 | -0.00029 | -0.000055 | -0.00015 |  |  |  |

A2，F2, H2：計算を始めるクランク角，角速度，時間を初期値として与える．

A列：ここではクランク角*φ*が1度ずつ増えるようにした．例：[A3]=[A2]+1

B列～E列: 式(12.1)とともに別途計算で定まる定数．

G列：式(12.1)にB～F列の値を代入するとd2*φ/dt*2が求められる．

H列：例えば360度後の角速度が概ね同じとき，その所要時間の逆数が1秒当たりの回転数になる．

13.　図10の隙間を流れる流体に生じる圧力差は，問11の加速度と共に問12の係数に影響する．流速の勾配dv/dxと流体の粘度μ，せん断応力τ（注：応力は1平方メートルあたりにかかる力で，せん断は圧縮や引張と異なり互い違いに力が加わる状態である）が式13.1を満たす流体をニュートン流体と言う．動作流体の空気をニュートン流体とみなして考える．上下の圧力差が(*dP*/*dh*)*h*で与えられるものとします．

13.1　上下の圧力差が断面に与える力と側面のせん断力が釣り合うと仮定する，式(13.2)の考え方を図示してください．

13.2　図10における幅*d*の隙間の中心をx=0とした時の，位置*x*における流速*v*が式(13.3)になることを示してください．

13.3　図10における*d*×*L*の隙間を単位時間に通貨する動作流体の体積流量Qを求めてください．

ディスプレーサ

*d*

*L*

*h*

*x*=0

*x*

図10　2枚の平行な平板と，それが模擬するディスプレーサの側方の流路となる隙間

|  |  |
| --- | --- |
|  | (13.1) |
|  | (13.2) |

13修正.　図10の隙間を流れる流体に生じる圧力差は，問11の加速度と共に問12の係数に影響する．流速の勾配dv/dxと流体の粘度μ，せん断応力τ（注：応力は1平方メートルあたりにかかる力で，せん断は圧縮や引張と異なり互い違いに力が加わる状態である）が式13.1を満たす流体をニュートン流体と言う．動作流体の空気をニュートン流体とみなして考える．上下の圧力差が(*dP*/*dh*)*h*で与えられるものとします．

13.1　上下の圧力差が断面に与える力と側面のせん断力が釣り合うと仮定する，式(13.2)の考え方を図示してください．

13.2（修正）　図10における幅*d*の隙間の中心をx=0とした時の，位置*x*における流速*v*を求めてください．

13.3は削除

ディスプレーサ

*d*

*L*

*h*

*x*=0

*x*

図10　2枚の平行な平板と，それが模擬するディスプレーサの側方の流路となる隙間

|  |  |
| --- | --- |
|  | (13.1) |
|  | (13.2) |

14.　厚さ0.5mmの硬質塩化ビニル板2枚を間に厚さ1.0mmの樹脂を挟んで貼り合わせた部品が，厚さ1.0mmの硬質塩化ビニル樹脂に比べて，曲げ剛性IEが何倍になるか考えてください．間に挟んだ樹脂の縦弾性係数は影響が無いと仮定してください．

****

図11　材料力学の大雑把な説明

15．　熱伝導（注15.1）と熱伝達（注15.2）には式(15.1)～(15.3)の関係が成り立つとする．図12において熱通過率Kを求めてください．また熱伝導率λと熱伝達率αの単位を求めてください．ここで*Q*は1秒当たりに通過する熱量で単位はWです．注15.1：物質内の熱の移動，注15.2：物体と物体の界面での熱の移動

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 熱伝導： |  | (15.1) |
| 熱伝達： | | (15.2) |
| 熱通過率*K*をつかった表現： | | (15.2) |

（熱通過方向に対する）断面積*A*，（熱通過方向に対する）厚さ*L*，熱伝導率λの円形の伝熱板

伝熱板上方の冷却空気の温度*T*l

伝熱板下方の動作流体の温度*T*h

伝熱板と冷却空気の間の熱伝達率αl

伝熱板と動作流体の間の熱伝達率α2

図12　平板伝熱面

１６．　絶対値が図13の斜線部の面積と同じで負の値を示す*S*が得られるように，空欄をうめて完成させた式(16.1)を記述してください．なお，逆関数は使わず，*y*=*F*(*x*)も具体的な関数は指定していません．



(16．1)